Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Διδάσκων: Ιωάννης Γιαννούλης

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ IV

26 Ιανουαρίου 2017

Θέμα 1. **[1]** Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x,y) = \begin{cases} 0, & x < \frac{1}{2}, \\ 1, & x \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$ $(x,y) \in A = [0,1] \times [0,1]$, είναι ολοκληρώσιμη και υπολογίστε το ολοκλήρωμά της.

Θέμα 2. **[0.5]** Υπολογίστε τον όγκο ενός κυλίνδρου ακτίνας $R > 0$ και ύψους $h > 0$ με χρήση της Αρχής του Cavalieri.

$x^2+y^2=R^2$

Θέμα 3. **[1]** Έστω ότι το $M \subset \mathbf{R}^3$ περικλείεται από τα επίπεδα $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ και $x+y+z = 1$. Δείξτε ότι το M είναι ένα κανονικό χωρίο ως προς το επίπεδο $z = 0$ και υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_M (1-x)\, d(x,y,z)$.

Θέμα 4. **[1]** Για σταθερά $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbf{R}^3$ και $a, b, c > 0$ υπολογίστε τον όγκο του ελλειψοειδούς $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} \leq 1$.

Θέμα 5. **[0.4 + 0.3 + 0.3]** Έστω $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ με $\vec{a} \neq \vec{b}$.

(α′) Παραμετρικοποιήστε το ευθύγραμμο τμήμα από το $\vec{a}$ στο $\vec{b}$ μέσω μιας καμπύλης $\vec{\gamma}$ που έχει σταθερό εφαπτόμενο διάνυσμα με νόρμα 1.

(β′) Υπολογίστε το μήκος της καμπύλης $\vec{\gamma}$.

(γ′) Πώς ονομάζεται μια παραμετρικοποίηση καμπύλης στην οποία η νόρμα των εφαπτόμενων διανυσμάτων είναι σταθερή και ίση με 1;

Θέμα 6. **[1.5]** Έστω ένα κυρτό υποσύνολο $K \subset \mathbf{R}^2$ το οποίο περικλείεται από την πολυγωνική γραμμή που σχηματίζουν τα σημεία (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, n$, με αυτή τη σειρά και $(x_0, y_0) = (x_n, y_n)$. Υπολογίστε το εμβαδό του K.

Θέμα 7. Έστω $S \subset \mathbf{R}^3$ η επιφάνεια που προκύπτει από την τομή του γραφήματος της συνάρτησης $g(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, με τον κύλινδρο $x^2+y^2 \leq R^2$ $(R > 0)$ στον $\mathbf{R}^3$.

(α′) **[0.5]** Υπολογίστε το εμβαδό της S.

(β′) **[0.5]** Επαληθεύστε το Θεώρημα του Stokes για την S και τη συνάρτηση $\vec{f}(x,y,z) = (x,y,z)$, $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$.

(γ′) **[0.5]** Πώς μπορεί να δει κάποιος ποια είναι η τιμή του επικαμπυλίου ολοκληρώματος στο (β′) χωρίς να χρησιμοποιήσει τον ορισμό του για να το υπολογίσει;

Θέμα 8. **[1.2 + 0.3]** Επαληθεύστε το Θεώρημα του Gauss για μια μπάλα στον $\mathbf{R}^3$ κέντρου $(0,0,0)$ και ακτίνας $R > 0$ και τη συνάρτηση $\vec{f}(x,y,z) = \frac{1}{3}(x,y,z)$, $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$.
Τι εκφράζει η τιμή που υπολογίσατε;

Θέμα 9. **[1]** Εξετάστε αν η ακολουθία συναρτήσεων $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < n, \\ 1, & x \geq n, \end{cases}$ $n \in \mathbf{N}$, συγκλίνει για $n \to \infty$ (i) κατά σημείο και (ii) ομοιόμορφα, και δώστε τα αντίστοιχα όρια, αν υπάρχουν.

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!